

Tema 9: Ejemplos de EVT

7 y 10 de junio de 2010

- 1 Espacios de sucesiones
- 2 Familias sumables
- 3 Espacios de familias sumables
- 4 Espacios de Hilbert

Espacios l_p Espacio de medida: $\Omega = \mathbb{N}$, $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\mathbb{N})$, $\mu =$ número de elementos

$$x : \mathbb{N} \rightarrow [0, \infty] \quad \int_{\mathbb{N}} x d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} x(n)$$

$$L_p(\mu) = \mathcal{L}_p(\mu) = \left\{ x \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} : \sum_{n=1}^{\infty} |x(n)|^p < \infty \right\} = l_p \quad (0 < p < \infty)$$

$$x \in l_1 \implies \int_{\mathbb{N}} x d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} x(n)$$

$$L_{\infty}(\mu) = \mathcal{L}_{\infty}(\mu) = \left\{ x \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} : \sup\{|x(n)| : n \in \mathbb{N}\} < \infty \right\} = l_{\infty}$$

$$L_0(\mu) = \mathcal{L}_0(\mu) = \mathbb{K}^{\mathbb{N}} = \omega$$

El espacio l_∞

$$l_\infty = \{x \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} : \sup\{|x(n)| : n \in \mathbb{N}\} < \infty\}$$

Espacio de Banach con la norma

$$\|x\|_\infty = \sup\{|x(n)| : n \in \mathbb{N}\} \quad (x \in l_\infty)$$

Convergencia uniforme en \mathbb{N} : $x_n \in l_\infty \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad x \in l_\infty$

$$\|x_n - x\|_\infty \rightarrow 0 \iff \lim_{n \rightarrow \infty} x_n(k) = x(k) \quad \text{uniformemente en } k \in \mathbb{N}$$

Subespacio denso:

$$l_\infty = \overline{\text{Lin}\{\chi_E : E \subseteq \mathbb{N}\}}$$

l_∞ no es separable: $E, F \subseteq \mathbb{N}, E \neq F \Rightarrow \|\chi_E - \chi_F\|_\infty = 1$

Subespacios destacados de l_∞

Vectores unidad: $\{e_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, $e_n(n) = 1$, $e_n(k) = 0 \forall k \neq n$

$$c_{00} = \text{Lin}\{e_n : n \in \mathbb{N}\} = \left\{ \sum_{k=1}^N \lambda_k e_k : N \in \mathbb{N}, \lambda_1, \dots, \lambda_N \in \mathbb{K} \right\}$$

$$c_0 = \left\{ x \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} : \lim_{n \rightarrow \infty} x(n) = 0 \right\}$$

$$c = \left\{ x \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} : \exists \lim_{n \rightarrow \infty} x(n) \right\} = c_0 \oplus \mathbb{K}u \quad (u(n) = 1 \forall n \in \mathbb{N})$$

Observaciones

- c_0 y c son espacios de Banach (subespacios cerrados de l_∞)

- c_{00} es denso en c_0 : $x \in c_0 \Rightarrow x = \sum_{n=1}^{\infty} x(n) e_n$

Serie incondicionalmente convergente en c_0 . Los vectores unidad forman una **base de Schauder**, de hecho una **base incondicional**, de c_0

Espacios l_p con $0 < p < \infty$

$$l_p = \left\{ x \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} : \sum_{n=1}^{\infty} |x(n)|^p < \infty \right\} \quad (0 < p < \infty)$$

Para $1 \leq p < \infty$, l_p es un **espacio de Banach** con la **norma**:

$$\|x\|_p = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x(n)|^p \right)^{1/p} \quad (x \in l_p)$$

Para $0 < p < 1$, l_p tiene la topología asociada a:

- La **pseudonorma**: $[x]_p = \sum_{n=1}^{\infty} |x(n)|^p$ que le convierte en un **F-espacio**

- O mejor, la **casinorma**: $\|x\|_p = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x(n)|^p \right)^{1/p}$ que le convierte en un **espacio casi-Banach**

$$\|x + y\|_p \leq 2^{\frac{1}{p}-1} (\|x\|_p + \|y\|_p) \quad (x, y \in l_p, 0 < p < 1)$$

Para $0 < p < 1$, l_p **no es localmente convexo**

Espacios l_p con $0 < p < \infty$

- c_{00} es un subespacio denso en l_p :

$$x \in l_p \Rightarrow x = \sum_{n=1}^{\infty} x(n) e_n$$

serie (incondicionalmente) convergente en l_p . Los vectores unidad forman una base (incondicional) de l_p

- Dependencia de p :

$$0 < p < q \leq \infty, x \in l_p \Rightarrow x \in l_q, \|x\|_q \leq \|x\|_p$$

La inclusión $l_p \subseteq l_q$ es estricta y el operador $Id: l_p \rightarrow l_q$ es lineal continuo e inyectivo, pero no es un monomorfismo

Caso $p = 0$

- $\omega = \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, la topología producto es la asociada a la **pseudonorma**

$$[x]_0 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{|x(n)|}{1 + |x(n)|} \quad (x \in \Omega)$$

- La convergencia en ω es la puntual:

$$[x_n - x]_0 \rightarrow 0 \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_n(k) = x(k) \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

ω es un **espacio de Fréchet** no normable

- c_{00} es denso en ω y ω es separable
- Para $0 < p < q < \infty$, como espacios vectoriales:

$$c_{00} \subset l_p \subset l_q \subset c_0 \subset c \subset l_\infty \subset \omega$$

Familias sumables en EVT

$\Lambda \neq \emptyset$, $\mathcal{F}(\Lambda) = \{J \subseteq \Lambda : J \text{ finito}\}$ conjunto dirigido (por inclusión)

X EVT separado, $\{x_\lambda : \lambda \in \Lambda\} \subseteq X$

Red de sumas finitas:

$$S_J = \sum_{\lambda \in J} x_\lambda \quad (J \in \mathcal{F}(\Lambda))$$

$\{x_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ sumable $\iff \{S_J\}$ convergente

$$\sum_{\lambda \in \Lambda} x_\lambda = x \iff \{S_J\} \rightarrow x$$

$$\forall U \in \mathcal{U}(0) \exists J_0 \in \mathcal{F}(\Lambda) : J \in \mathcal{F}(\Lambda), J \supseteq J_0 \Rightarrow \sum_{\lambda \in J} x_\lambda - x \in U$$

Condición de Cauchy:

$$\forall U \in \mathcal{U}(0) \exists J_0 \in \mathcal{F}(\Lambda) : K \in \mathcal{F}(\Lambda), K \cap J_0 = \emptyset \Rightarrow \sum_{\lambda \in K} x_\lambda \in U$$

Hechos básicos

- Inmediatos: Sumas finitas, unicidad, sumandos nulos, complitud

- Linealidad:
$$\sum_{\lambda \in \Lambda} (\alpha a_\lambda + \beta b_\lambda) = \alpha \sum_{\lambda \in \Lambda} a_\lambda + \beta \sum_{\lambda \in \Lambda} b_\lambda$$

- Incondicionalidad: $\sigma : I \rightarrow \Lambda$ biyectiva,

$$\sum_{\lambda \in \Lambda} x_\lambda = x \iff \sum_{i \in I} x_{\sigma(i)} = x$$

- Operadores: X, Y EVT separados, $T \in L(X, Y)$,

$$x = \sum_{\lambda \in \Lambda} x_\lambda \text{ en } X \implies T(x) = \sum_{\lambda \in \Lambda} T(x_\lambda) \text{ en } Y$$

- Consecuencias de la condición de Cauchy:

- (1) Subfamilias: $\Lambda_0 \subseteq \Lambda \implies \{x_\lambda : \lambda \in \Lambda_0\}$ Cauchy
- (2) $U \in \mathcal{U}(0) \implies \{\lambda \in \Lambda : x_\lambda \notin U\}$ finito
- (3) Si X es metrizable: $\{\lambda \in \Lambda : x_\lambda \neq 0\}$ es numerable

Relación con las series

- X EVT separado, Λ numerable. Para $\{x_\lambda : \lambda \in \Lambda\} \subseteq X$ equivalen:
 - (a) $\{x_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ sumable
 - (b) $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow \Lambda$ biyectiva $\Rightarrow \sum_{n \geq 1} x_{\sigma(n)}$ converge.

Si se cumplen (a) y (b):
$$\sum_{\lambda \in \Lambda} x_\lambda = \sum_{n=1}^{\infty} x_{\sigma(n)}$$

- X EVT metrizable. Para $\{x_\lambda : \lambda \in \Lambda\} \subseteq X$ equivalen:
 - (a) $\{x_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ sumable
 - (b) $\Lambda_1 = \{\lambda \in \Lambda : x_\lambda \neq 0\}$ es numerable y para cualquier biyección $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow \Lambda_1$ la serie $\sum_{n \geq 1} x_{\sigma(n)}$ converge

Sumabilidad absoluta

Familias de números positivos:

$$\{\rho_\lambda : \lambda \in \Lambda\} \subseteq [0, \infty[\quad \sum_{\lambda \in \Lambda} \rho_\lambda = \sup \left\{ \sum_{\lambda \in J} \rho_\lambda : J \in \mathcal{F}(\Lambda) \right\}$$

$$\{\rho_\lambda : \lambda \in \Lambda\} \text{ sumable} \iff \sum_{\lambda \in \Lambda} \rho_\lambda < \infty$$

X EVT metrizable, con pseudonorma ν :

$$\{x_\lambda : \lambda \in \Lambda\} \text{ absolutamente sumable} \iff \sum_{\lambda \in \Lambda} \nu(x_\lambda) < \infty$$

Sumabilidad y sumabilidad absoluta

- X F-espacio \iff toda familia absolutamente sumable es sumable
- En dimensión finita toda familia sumable es absolutamente sumable
- **Teorema de Dvoretzky-Rogers (1950):** En todo espacio de Banach de dimensión infinita existe una serie incondicionalmente convergente que no es absolutamente convergente, equivalentemente una familia sumable que no es absolutamente sumable

Espacios l_p^Λ Espacio de medida: $\Omega = \Lambda \neq \emptyset$, $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Lambda)$, $\mu = \text{número de elementos}$

$$x : \Lambda \rightarrow [0, \infty] \quad \int_{\Lambda} x d\mu = \sum_{\lambda \in \Lambda} x(\lambda)$$

$$L_p(\mu) = \mathcal{L}_p(\mu) = \left\{ x \in \mathbb{K}^\Lambda : \sum_{\lambda \in \Lambda} |x(\lambda)|^p < \infty \right\} = l_p^\Lambda \quad (0 < p < \infty)$$

$$x \in l_1 \implies \int_{\Lambda} x d\mu = \sum_{\lambda \in \Lambda} x(\lambda)$$

$$L_\infty(\mu) = \mathcal{L}_\infty(\mu) = \left\{ x \in \mathbb{K}^\Lambda : \sup\{|x(\lambda)| : \lambda \in \Lambda\} < \infty \right\} = l_\infty^\Lambda$$

$$L_0(\mu) = \mathcal{L}_0(\mu) = \mathbb{K}^\Lambda$$

El espacio l_∞^Λ

$$l_\infty^\Lambda = \{x \in \mathbb{K}^\Lambda : \sup\{|x(\lambda)| : \lambda \in \Lambda\} < \infty\}$$

Espacio de Banach con la norma

$$\|x\|_\infty = \sup\{|x(\lambda)| : \lambda \in \Lambda\} \quad (x \in l_\infty^\Lambda)$$

Convergencia uniforme en Λ : $x_n \in l_\infty^\Lambda \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad x \in l_\infty^\Lambda$

$$\|x_n - x\|_\infty \rightarrow 0 \iff \lim_{n \rightarrow \infty} x_n(\lambda) = x(\lambda) \text{ uniformemente en } \lambda \in \Lambda$$

Subespacio denso:

$$l_\infty^\Lambda = \overline{\text{Lin}\{\chi_E : E \subseteq \Lambda\}}$$

Λ infinito $\implies l_\infty^\Lambda$ **no es separable:** $l_\infty \subseteq l_\infty^\Lambda$

Subespacios destacados de l_∞^Λ

Vectores unidad: $\{e_\lambda : \lambda \in \Lambda\} \subseteq \mathbb{K}^\Lambda$, $e_\lambda(\lambda) = 1$, $e_\lambda(\delta) = 0 \forall \delta \in \Lambda \setminus \{\lambda\}$

Familias de soporte finito:

$$c_{00}(\Lambda) = \text{Lin} \{e_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$$

Familias convergentes a cero:

$$x \in c_0(\Lambda) \iff \forall \varepsilon > 0, \{\lambda \in \Lambda : |x(\lambda)| \geq \varepsilon\} \in \mathcal{F}(\Lambda)$$

Familias convergentes:

$$c(\Lambda) = c_0(\Lambda) \oplus \mathbb{K}u \quad (u(\lambda) = 1 \forall \lambda \in \Lambda)$$

Observaciones

- $c_0(\Lambda)$ y $c(\Lambda)$ son espacios de Banach (subespacios cerrados de l_∞^Λ)
- $c_{00}(\Lambda)$ es denso en $c_0(\Lambda)$: $x \in c_0(\Lambda) \Rightarrow x = \sum_{\lambda \in \Lambda} x(\lambda) e_\lambda$

Los vectores unidad forman una **base**, de $c_0(\Lambda)$

Espacios l_p^Λ con $0 < p < \infty$

$$l_p^\Lambda = \left\{ x \in \mathbb{K}^\Lambda : \sum_{\lambda \in \Lambda} |x(\lambda)|^p < \infty \right\} \quad (0 < p < \infty)$$

Para $1 \leq p < \infty$, l_p^Λ es un **espacio de Banach** con la **norma**:

$$\|x\|_p = \left(\sum_{\lambda \in \Lambda} |x(\lambda)|^p \right)^{1/p} \quad (x \in l_p^\Lambda)$$

Para $0 < p < 1$, l_p^Λ tiene la topología asociada a:

- La **pseudonorma**: $[x]_p = \sum_{\lambda \in \Lambda} |x(\lambda)|^p$ que le convierte en un **F-espacio**

- O la **casinorma**: $\|x\|_p = \left(\sum_{\lambda \in \Lambda} |x(\lambda)|^p \right)^{1/p}$ que le convierte en un **espacio casi-Banach**

Si Λ es infinito y $0 < p < 1$, l_p^Λ **no es localmente convexo**

Espacios l_p^Λ con $0 < p < \infty$

- $c_{00}(\Lambda)$ es un subespacio denso en l_p^Λ :

$$x \in l_p^\Lambda \Rightarrow x = \sum_{\lambda \in \Lambda} x(\lambda) e_\lambda$$

Los vectores unidad forman una base de l_p^Λ

- Dependencia de p :

$$0 < p < q \leq \infty, x \in l_p^\Lambda \Rightarrow x \in l_q^\Lambda, \|x\|_q \leq \|x\|_p$$

Si Λ es infinito, la inclusión $l_p^\Lambda \subseteq l_q^\Lambda$ es estricta y el operador $Id: l_p^\Lambda \rightarrow l_q^\Lambda$ es lineal continuo e inyectivo, pero no es un monomorfismo

Caso $p = 0$

- En \mathbb{K}^Λ es natural considerar la topología producto, que le convierte en un **ELC separado y completo**. Si Λ no es numerable, \mathbb{K}^Λ **no es metrizable**
- Convergencia puntual: $\{x_i\}$ red en \mathbb{K}^Λ , $x \in \mathbb{K}^\Lambda$

$$\{x_i\} \rightarrow x \iff \{x_i(\lambda)\} \rightarrow x(\lambda) \quad \forall \lambda \in \Lambda$$

- $c_{00}(\Lambda)$ es denso en \mathbb{K}^Λ :

$$x \in \mathbb{K}^\Lambda \implies x = \sum_{\lambda \in \Lambda} x(\lambda) e_\lambda$$

- \mathbb{K}^Λ tiene la **propiedad de Heine-Borel**: todo subconjunto cerrado y acotado de \mathbb{K}^Λ es compacto
- Para $0 < p < q < \infty$, como espacios vectoriales:

$$c_{00}(\Lambda) \subseteq l_p^\Lambda \subseteq l_q^\Lambda \subseteq c_0(\Lambda) \subseteq c(\Lambda) \subseteq l_\infty^\Lambda \subseteq \mathbb{K}^\Lambda$$

Espacio pre-hilbertiano

Espacio pre-hilbertiano = espacio vectorial X con un **producto escalar**: aplicación de $X \times X$ en \mathbb{K} , $(x, y) \mapsto (x|y)$, verificando:

- (1) Lineal en la primera variable: $(\alpha x + y|z) = \alpha(x|z) + (y|z)$
- (2) Conjugado-lineal en la segunda: $(x|\alpha y + z) = \bar{\alpha}(x|y) + (x|z)$
 ((1) + (2) = **forma sexquilineal**; si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ **bilineal**)
- (3) **Hermítica**: $(y|x) = \overline{(x|y)}$ (**simétrica** si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$)
 ($x \mapsto (x|x)$, de X en \mathbb{R} **forma cuadrática**)
- (4) **Definida positiva**: $(x|x) > 0$ ($x \neq 0$)

Norma de un espacio pre-hilbertiano

$$\|x\| = (x|x)^{1/2} \quad (x \in X)$$

Desigualdad de Cauchy-Schwartz:

$$|(x|y)| \leq \|x\| \|y\|$$

Espacio de Hilbert cuando la norma es completa

Polarización: $\operatorname{Re}(x|y) = \frac{1}{4} (\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2)$; $\operatorname{Im}(x|y) = \operatorname{Re}(x|iy)$

Teorema de Jordan-von Neumann

Un espacio normado $(X, \|\cdot\|)$ es un espacio pre-hilbertiano si, y sólo si, verifica la **identidad del paralelogramo**:

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 \quad \forall x, y \in X$$

Ejemplos

$(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ espacio de medida no trivial:

$$\exists A, B \in \mathcal{A} : A \cap B = \emptyset, 0 < \mu(A) < \infty, 0 < \mu(B) < \infty$$

Entonces:

$$L_p(\mu) \text{ Espacio de Hilbert} \iff p = 2$$

Producto escalar en $L_2(\mu)$:

$$(f|g) = \int_{\Omega} f \bar{g} d\mu \quad (f, g \in L_2(\mu)); \quad (x|y) = \sum_{\lambda \in \Lambda} x(\lambda) \overline{y(\lambda)} \quad (x, y \in l_2^{\Lambda})$$

Teorema de la Proyección Ortogonal

- **Aproximación óptima.** Hilbert $H \supseteq C$ convexo y cerrado:

$$x \in H \implies \exists! P_C(x) \in C : \|x - P_C(x)\| = \min \{\|x - y\| : y \in C\}$$

- $P_C(x)$ se caracteriza por: $\operatorname{Re}(x - P_C(x)|y - P_C(x)) \leq 0 \quad \forall y \in C$
- Si M es un subespacio cerrado: $(x - P_M(x)|m) = 0 \quad \forall m \in M$,

$$x - P_M(x) \in M^\perp := \{z \in H : (z|m) = 0 \quad \forall m \in M\}$$

- $H = M \oplus M^\perp$ suma topológico-directa:

$$\|x\|^2 = \|P_M(x)\|^2 + \|x - P_M(x)\|^2 \quad (x \in X)$$

- **Todo subespacio cerrado de un espacio de Hilbert está complementado**

Teorema de Lindenstrauss-Tzafriri (1971)

Un espacio de Banach X es isomorfo a un espacio de Hilbert si, y sólo si, todo subespacio cerrado de X está complementado en X .

Sistemas y bases ortonormales

X espacio pre-hilbertiano, $E = \{e_\lambda : \lambda \in \Lambda\} \subset X$ **sistema ortonormal**:

$$(e_\lambda | e_\delta) = 0 \quad (\lambda \neq \delta); \quad \|e_\lambda\| = 1 \quad \forall \lambda \in \Lambda$$

Base ortonormal cuando, además, $X = \overline{\text{Lin}(E)}$

Propiedades de los sistemas ortonormales

H Hilbert, $E = \{e_\lambda : \lambda \in \Lambda\} \subset H$ ortonormal, $M = \overline{\text{Lin}(E)}$, $x \in H$.

- **Desigualdad de Bessel:**
$$\sum_{\lambda \in \Lambda} |(x|e_\lambda)|^2 \leq \|x\|^2$$
- **Proyección ortogonal sobre M :**
$$P_M(x) = \sum_{\lambda \in \Lambda} (x|e_\lambda) e_\lambda$$
- $$\|x\|^2 = \sum_{\lambda \in \Lambda} |(x|e_\lambda)|^2 + \|x - P_M(x)\|^2$$

Bases ortonormales

H espacio de Hilbert, $\{e_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ base ortonormal:

- **Igualdad de Bessel:** $\|x\|^2 = \sum_{\lambda \in \Lambda} |(x|e_\lambda)|^2 \quad (x \in H)$
- **Igualdad de Parseval:** $(x|y) = \sum_{\lambda \in \Lambda} (x|e_\lambda)(e_\lambda|y) \quad (x, y \in H)$
- **Desarrollo de Fourier:** $x = \sum_{\lambda \in \Lambda} (x|e_\lambda)e_\lambda \quad (x \in H)$
- En resumen: $H \equiv l_2^\Lambda$

Clasificación de los espacios de Hilbert

- Todo espacio de Hilbert admite una base ortonormal
- Todas las bases ortonormales de un espacio de Hilbert tienen el mismo cardinal: **dimensión hilbertiana**.
- Dos espacios de Hilbert son isométricamente isomorfos si, y sólo si, tienen la misma dimensión hilbertiana
- Salvo isomorfismos isométricos, los únicos espacios de Hilbert separables son l_2^N con $N \in \mathbb{N}$ y l_2